



TITLE:

Jackの補題とMiller-Mocanuの補題について(Jackの補題とその周辺に関する研究)

AUTHOR(S):

福井, 誠一

CITATION:

福井, 誠一. Jackの補題とMiller-Mocanuの補題について(Jackの補題とその周辺に関する研究). 数理解析研究所講究録 1994, 881: 1-8

ISSUE DATE:

1994-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84230>

RIGHT:

Jack の補題と Miller-Mocanu の補題について

和歌山大学・教育 福井 誠一 (Seiichi FUKUI)

Jack は[2]で次の補題を示して位数 α の星型関数の問題を解いた。

補題 1. $w(z)$ を単位円板内 $U = \{z; |z| < 1\}$ で正則かつ $w(0) = 0$ を満たす関数とする。このとき、円周 $\{|z| = r\}$ 、 $r < 1$ 上の $|w(z)|$ の最大値が $z = z_1$ でとれば、 $z_1 w'(z_1) = k w(z_1)$ が成立し、ここに k は実数で $k \geq 1$ を満たす。

その後 Fukui と Sakaguchi は[1]で次の様な補題を与え、簡単な証明をつけた。

補題 2. $w(z) = a_n z^n + \dots$ を $|z| < R$ で正則で、 $a_n \neq 0$ 、 $n \geq 1$ (n は自然数)

とする。円周 $\{|z| = r < R\}$ 上の $|w(z)|$ の最大値が $z = z_0$ でとれば、 $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)}$ は

実数でかつ $\frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \geq n$ を満たす。

Miller と Mocanu は補題 2 に先立って[3]で補題 1 を拡張して次の補題 3 を与え、完璧な証明をつけた。

補題 3. $g(z) = g_n z^n + g_{n+1} z^{n+1} + \dots$ を U で正則で $g(z) \neq 0$ かつ $n \geq 1$ とする。もし $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ ($r_0 < 1$) で $|g(z_0)| = \max_{|z| \leq r} |g(z)|$ が満たされれば、次の関係が成立する。

$$(1) \quad \frac{z_0 g'(z_0)}{g(z_0)} = m, \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 g'(z_0)}{g'(z_0)} + 1 \geq m.$$

ここに、 $m \geq n \geq 1$ を満たしている。

同じ論文([3], Theorem 4)で彼らは次の補題を示した。

補題 4. a を複素定数として、 $p(z) = a + p_n z^n + p_{n+1} z^{n+1} + \dots$ を U で正則とし、 $p(z) \neq a$ かつ $n \geq 1$ を満たすものとする。今 $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ ($0 < r_0 < 1$) で $\operatorname{Re} p(z_0) = \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} p(z)$ が成立すれば、

$$(2) \quad z_0 p'(z_0) \leq - \frac{n |a - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}} \leq - \frac{n \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}}{2},$$

$$(3) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p'(z_0)} + 1 > 0, \quad \operatorname{Re} z_0^2 p'(z_0) + z_0 p'(z_0) \leq 0$$

を満たす。

この特別な場合として、 $a = 1$ 、 $\operatorname{Re} p(z_0) = 0$ のとき

補題 4'. $p(z) = 1 + p_n z^n + \dots$ を U で正則で $p(z) \neq 1$ かつ $n \geq 1$ とする。今 $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ ($0 < r_0 < 1$) で $\operatorname{Re} p(z_0) = \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} p(z) = 0$ を満たせば、

$$(4) \quad z_0 p'(z_0) \leq - \frac{n |1 - p(z_0)|^2}{2} = - \frac{n \{1 + |p(z_0)|^2\}}{2} \leq - \frac{n}{2}$$

が成立する。

このとき、補題 2 を仮定すれば、補題 4' が成立する。逆に、補題 4' を仮定すれば、補題 2 が成立する。この意味で Jack の補題と Miller と Mocanu の補題は同値であると言える。

定理 1. 補題 2 と補題 4' は同値である。

これを示すのには次のようにする。まず、 $w(z) = \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1}$ または

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} \quad \text{で } p(z) \text{ または } w(z) \text{ を定義する。}$$

この関係式から $1 - |w(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Re} p(z)}{|p(z) + 1|^2}$ を得る。これは

$$\operatorname{Re} p(z) > 0, |z| < |z_0| = r < R \iff |w(z)| < 1, |z| < |z_0| \quad \text{かつ}$$

$\operatorname{Re} p(z_0) = 0 \iff |w(z_0)| = 1$ を示している。また、対数微分することによって

$$z_0 p'(z_0) = \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \cdot \frac{2 w(z_0)}{(1 - w(z_0))^2} \quad \text{を得る。} \quad \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} = m, w(z_0) = e^{i\theta}$$

と置くことによって同値性を示すことができる。

補題 4 に関連してよく使われる結果を、もっと一般的な形で次に与える。

定理 2. a を複素定数とする。 $p(z) = a + p_n z^n + \dots$ を U で正則かつ

$\operatorname{Re} p(z) > \gamma, |z| < |z_0|, z_0 \in U$ さらに $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ を満たすとする。このとき次の不等式が成立する。

$$(5) \quad z_0 p'(z_0) \leq - \frac{n |a - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}} \leq - \frac{n \operatorname{Re}(a - p(z_0))}{2},$$

$$(6) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \leq \frac{n(|b| - |a|)}{2(|b| + |a|)} & (\gamma > 0) \\ \geq \frac{n(|b| - |a|)}{2(|b| + |a|)} & (\gamma < 0) \end{cases}$$

が成立する。ここに、 $b = 2\gamma - \bar{a}$ である。

証明. $z=0$ でも成立しなければならないから $\operatorname{Re} a > \gamma$ である。また、 $\gamma > 0$ なら $|b| < |a|$ 、 $\gamma < 0$ なら $|b| > |a|$ である。さて、 $w(z)$ を

$$(7) \quad w(z) = \frac{p(z) - a}{p(z) - b}$$

で定義すると、 $w(z)$ は U で正則でかつ $w(z) = 0$ を満たす。さらに、 $w(z) = w_n z^n + \dots$

の形で $p(z) = \frac{a - bw(z)}{1 - w(z)}$ と $b = 2\gamma - \bar{a}$ から

$$(8) \quad 1 - |w(z)|^2 = \frac{|p(z) - b|^2 - |p(z) - a|^2}{|p(z) - b|^2} = \frac{4(\operatorname{Re} a - \gamma)\{\operatorname{Re} p(z) - \gamma\}}{|p(z) - b|^2}$$

が成立する。これは仮定から $\operatorname{Re} p(z) > \gamma, |z| < |z_0|, z_0 \in U \Leftrightarrow$

$$|w(z)| < 1, |z| < |z_0|, z_0 \in U \text{ かつ } \operatorname{Re} p(z_0) = \gamma \Leftrightarrow |w(z_0)| = 1$$

を示している。これはまた、補題 2 の仮定を満たしているから $w(z_0) = e^{i\theta} (\theta \in \mathbb{R})$,

$$\frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = m \geq n \text{ と置くことができる。 (7) を対数微分することにより}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} &= \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \left\{ \frac{w(z_0)}{1 - w(z_0)} - \frac{bw(z_0)}{a - bw(z_0)} \right\} \\ &= \frac{z_0 w'(z_0)}{w(z_0)} \cdot \frac{(a - b)w(z_0)}{(1 - w(z_0))(a - bw(z_0))} = m \cdot \frac{(a - b)e^{i\theta}}{(1 - e^{i\theta})(a - be^{i\theta})}, \end{aligned}$$

$m \geq n$ を得、また

$$z_0 p'(z_0) = m \cdot (a - b) \frac{w(z_0)}{(1 - w(z_0))^2} = \frac{m(\operatorname{Re} a - \gamma)}{\cos \theta - 1} < 0$$

$$\therefore z_0 p'(z_0) = m \cdot \frac{-\{p(z_0) - a\}\{p(z_0) - b\}}{(a - b)} = -\frac{n|a - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}} \leq -\frac{n \operatorname{Re}(a - p(z_0))}{2}$$

を得る。また、(9) から $\operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = -\frac{m}{2} - m \operatorname{Re} \frac{be^{i\theta}}{a - be^{i\theta}}$ となり

$$\gamma > 0 \text{ なら } |a| > |b| \text{ で } \frac{-|b|}{|a| + |b|} \leq \operatorname{Re} \frac{be^{i\theta}}{a - be^{i\theta}} \leq \frac{|b|}{|a| - |b|},$$

$$\gamma < 0 \text{ なら } |b| > |a| \text{ で } \frac{|b|}{|a| - |b|} \leq \operatorname{Re} \frac{be^{i\theta}}{a - be^{i\theta}} \leq \frac{-|b|}{|a| + |b|}$$

を得て、これから証明すべき不等式を得る。□

実際によく使われるのは、 a が実数のときや、 $a=1, \gamma=0$ のときである。

系 1. a を実数、 $p(z)=a+p_n z^n+\cdots$ を U で正則とする。このとき、

$\operatorname{Re} p(z) > \gamma, |z| < |z_0|, z_0 \in U$ かつ $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

$$(10) \quad z_0 p'(z_0) \leq - \frac{n |a - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}} \leq - \frac{n(a - \gamma)}{2}$$

$$(11) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \leq - \frac{n(a - \gamma)}{2 \gamma} & (a > \gamma > \frac{a}{2} > 0) \\ \leq - \frac{n \gamma}{2(a - \gamma)} & (\frac{a}{2} > \gamma > 0) \\ \geq - \frac{n \gamma}{2(a - \gamma)} & (a > 0 > \gamma) \\ \geq - \frac{n(a - \gamma)}{2 \gamma} & (0 > a > \gamma) \end{cases}$$

系 2. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots$ を U で正則かつ $\operatorname{Re} p(z) > \gamma, |z| < |z_0|, z_0 \in U$ かつ $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

$$(12) \quad z_0 p'(z_0) \leq - \frac{n |1 - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{1 - p(z_0)\}} \leq - \frac{n(1 - \gamma)}{2}$$

$$(13) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \leq - \frac{n(1 - \gamma)}{2 \gamma} & (1 > \gamma > \frac{1}{2}) \\ \leq - \frac{n \gamma}{2(1 - \gamma)} & (\frac{1}{2} > \gamma > 0) \\ \geq - \frac{n \gamma}{2(1 - \gamma)} & (0 > \gamma) \end{cases}$$

系 3. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots$ を U で正則かつ $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $|z| < |z_0|$, $z_0 \in U$ かつ $\operatorname{Re} p(z_0)=0$ が満たされれば、次の不等式が成立する。

$$(14) \quad z_0 p'(z_0) \leq -\frac{n|1-p(z_0)|^2}{2} = -\frac{n\{1+|p(z_0)|^2\}}{2} \leq -\frac{n}{2}$$

$$(15) \quad \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} = i k n.$$

ここに、(15) の左辺は純虚数、また k は実数で $|k| \geq 1$ を満たす。

(14) は補題 4' の結果であり、(15) は Nunokawa [4] の結果である。

定理 2 の証明と同じアイデアで次の定理 3 が示される。よって結果のみを示し証明は省略する。

定理 3. a を複素定数とする。 $p(z)=a+p_n z^n+\cdots$ を U で正則かつ $\operatorname{Re} p(z) < \gamma$, $|z| < |z_0|$, $z_0 \in U$ さらに $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ を満たすとする。このとき次の不等式が成立する。

$$(16) \quad z_0 p'(z_0) \geq -\frac{n|a-p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a-p(z_0)\}} \geq -\frac{n \operatorname{Re}\{a-p(z_0)\}}{2}$$

$$(17) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \geq \frac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma > 0) \\ \leq \frac{n(|b|-|a|)}{2(|b|+|a|)} & (\gamma < 0) \end{cases}$$

が成立する。ここに、 $b = 2\gamma - \bar{a}$ で $\operatorname{Re} a < \gamma$ ある。

定理 2 と同様で、 $\gamma > 0$ なら $|a| < |b|$ 、 $\gamma < 0$ なら $|a| > |b|$ である。

特に、 a が実数のときや、 $a=1$ のときは次のようになる。

系 4. a を実数、 $p(z)=a+p_n z^n+\cdots$ を U で正則とする。このとき、

$\operatorname{Re} p(z) < \gamma$, $|z| < |z_0|$, $z_0 \in U$ かつ $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ が満たされれば、次の不等式が成立する。このとき $a < \gamma$ で

$$(18) \quad z_0 p'(z_0) \geq - \frac{n |a - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{a - p(z_0)\}} \geq - \frac{n(a - \gamma)}{2}$$

$$(19) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \begin{cases} \geq - \frac{n(a - \gamma)}{2 \gamma} & (\gamma > 0) \\ \leq - \frac{n \gamma}{2(a - \gamma)} & (\frac{a}{2} < \gamma < 0) \\ \leq - \frac{n(a - \gamma)}{2 \gamma} & (a < \gamma < \frac{a}{2} < 0). \end{cases}$$

系 5. $p(z)=1+p_n z^n+\cdots$ を U で正則かつ $\operatorname{Re} p(z) < \gamma$, $|z| < |z_0|$,

$z_0 \in U$ かつ $\operatorname{Re} p(z_0) = \gamma$ が満たされれば、 $\gamma > 1$ で次の不等式が成立する。

$$(20) \quad z_0 p'(z_0) \geq - \frac{n |1 - p(z_0)|^2}{2 \operatorname{Re}\{1 - p(z_0)\}} \geq - \frac{n(1 - \gamma)}{2}$$

$$(21) \quad \operatorname{Re} \frac{z_0 p'(z_0)}{p(z_0)} \geq - \frac{n(1 - \gamma)}{2 \gamma}.$$

ここでは、定理や系の応用については触れないでおく。

参 考 文 献

- [1] S.Fukui and K.Sakaguchi, An extension of a theorem of S.Ruscheweyh, Bull.Fac.Edu.Wakayama Univ.Nat.Sci., 29(1980), 1-3.
- [2] I.S.Jack, Functions starlike and convex of order α , J.London Math. Soc., (2)3(1971), 469-474.
- [3] S.S.Miller and P.T.Mocanu, Second order differential inequalities in the complex plane, Journal of Mathematical analysis and applications 65, (1978), 289-305.
- [4] M.Nunokawa, On properties of non-Carathéodory functions, Proceedings of the Japan Academy, vol.68, Ser.A, No.6(1992), 152-153.

930 Sakaedani Wakayama-city 640 Japan
Department of Mathematics
Faculty of Education
Wakayama University